Differentialgleichungen

Oliver Alt

1997-99

Differentialgleichungen

Eine gewöhnliche DGL n-ter Ordnung in allgemeiner Form hat folgenden Aufbau:

$$\boxed{a_n(x) \cdot y^{(n)} + a_{(n-1)}(x) \cdot y^{n-1} + \cdots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = r(x)}$$

Ist $r(x) = 0$ so heißt die DGL homogen, sonst inhomogen.

y bzw. $y^{(n)}$ ist eine abkürzende Schreibweise für $y(x)$ bzw. $y^{(n)}(x)$.

Man unterscheidet folgende Typen:

Typ 1:

$$y' = f(x),$$

wobei $f(x)$ stetig auf den Intervall I ist, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Typ 2:

$$y' = f(x, y),$$

mit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Typ 3:

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Typ 4:

$$y' = f(ax + by + c),$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Typ 5:

$$y' = f(\frac{x}{y})$$

Typ 6:

Lineare DGL 1. Ordnung.

$$y' + a(x) \cdot y = r(x)$$

Lösung von linearen DGL's 1. Ordnung

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\boxed{y' + a(x) \cdot y = r(x)}$$

1. Lösung der homogenen DGL:

$$y' + a(x) = 0$$

   - Trennung der Veränderlichen:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int a(x)dx = A(x)$$

$$\ln|y| = A(x) + c$$

$$|y| = e^{A(x)} \cdot e^c$$

   Nun wird e^c durch k ersetzt und es ergibt sich :

$$y = e^{A(x)} \cdot k \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$y_h(x) = e^{A(x)} \qquad k \in \mathbb{R}$$

2. Lösung der Inhomogenen:
   Zur Lösung der inhomogenen DGL faßt man k als eine Funktion $k(x)$ auf und macht den folgenden Ansatz:

$$\boxed{k'(x) = r(x) \cdot \frac{1}{y_h(x)}} \qquad (1)$$

$$= r(x) \cdot e^{-A(x)}$$

   und

$$y_s(x) = k(x) \cdot \underbrace{y_h(x)}_{e^{A(x)}} \qquad (2)$$

   Um $k(x)$ zu bestimmen integriert man Gleichung (1) und setzt dann in (2) ein.

Als Lösung ergibt sich gemäß Satz (13.3):

$$\boxed{y = y_s + y_h}$$