Formelsammlung Mathemathik I/II/III für ET

Oliver Alt

1997-99

1 Mengen (1.1.4 - 1.1.8)

2 Ungleichungen, Beträge

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Dreiecksungleichung (1.3.6)

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Allgemeine Dreiecksungleichung (1.4.5)

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$

Bernoulli'sche Ungleichung (1.4.3)

Für $a \geq -1$ gilt

$$(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a \qquad n \in \mathbb{R}$$

3 Binomialkoeffizienten, Fakultäten

Binomischer Satz (1.5.9)

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu \, b^{n-\nu}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3b^2a - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Vollständige Induktion (1.4.3)

1. Induktionsanfang: Nachweis für k=1
2. a) Induktionsannahme: Die Formel sei richtig für k $\geq$ 1
b) Induktionsschritt: Man zeige die Richtigkeit für k+1

4 Folgen

$$\{s_n\}^{\infty}_{\substack{n=1 \\ \text{od. } n=0}} = \{s_n\} = \{s_1, s_2, \dots\} \quad (2.1.1)$$

Monotonie einer Folge (2.1.13)

$$\begin{aligned}
s_n &\leq s_{n+1} \Rightarrow \{s_n\} \text{ monoton wachsend} \\
s_n &< s_{n+1} \Rightarrow \{s_n\} \text{ streng monoton wachsend} \\
s_n &\geq s_{n+1} \Rightarrow \{s_n\} \text{ monoton fallend} \\
s_n &> s_{n+1} \Rightarrow \{s_n\} \text{ streng monoton fallend}
\end{aligned}$$

Grenzwertsätze (2.1.21)

$$\lim_{n\to\infty} (s_n + t_n) = s + t$$

$$\lim_{n\to\infty} (s_n \cdot t_n) = s \cdot t$$

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{s_n}{t_n}) = \frac{s}{t} \qquad \text{für } t \neq 0$$

Die eulersche Zahl e

Die Folge $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} \to e \approx 2,718 \quad (2.2.8)$

Die Folge $\left\{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right\} \to \frac{1}{e} \quad (2.2.11)$

Die Folge $\{q^n\}$ (2.3.2)

Die Folge $\{q^n\}$ konvergiert für $-1 < q \leq 1$ und divergiert für alle anderen Werte von q. Darüber hinaus gilt für $-1 < q \leq 1$:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0\,.$$

Summe einer arithmetischen Folge (2.4.4)

Es sei $\{s_n\}$ eine arithmetische Folge mit der Differenz d. Dann ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu = \frac{n+1}{2}(2s_0 + nd) = \frac{n+1}{2}(s_1 + s_n)$$

Beschränktheit einer Folge (2.1.11)

Eine Folge ist beschränkt, wenn es eine Konstante k gibt, so daß

$$|s_n| \leq k \quad \forall \quad n \quad \text{gilt.}$$

Konvergenz einer Folge (2.1.15)

Eine Folge $\{s_n\}$ heißt konvergent zum Grenzwert $s \in \mathbb{R}$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein N_ϵ existiert, so daß gilt

$$|s_n - s| < \epsilon \quad \forall \quad n > N_\epsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \quad \text{od.} \quad s_n \to s \quad (n \to \infty)$$

Hauptsatz über monotone Folgen (2.2.1)

Ist die Folge $\{s_n\}$ monoton und beschränkt, so ist sie konvergent.

Das Einschlußkriterium (2.3.1)

Es seien $\{s_n\}$, $\{t_n\}$, $\{u_n\}$ Folgen mit

$$s_n \leq u_n \leq t_n\,.$$

Die Folgen $\{s_n\}$ und $\{t_n\}$ seien konvergent und es gelte $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n = s$.

Dann konvergiert auch $\{u_n\}$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} u_n = s\,.$$

Arithmetische Folgen (2.4.1)

Eine Folge $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ heißt arithmetische Folge, wenn es eine Zahl d gibt mit

$$s_n = s_{n-1} + d \qquad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

d heißt Differenz der Folge.

Geometrische Folgen (2.4.8)

Sie Folge $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ heißt geometrische Folge, wenn $s_0 \neq 0$ ist und es eine Zahl q gibt mit

$$s_n = q \cdot s_{n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Die Zahl q heißt Quotient der Folge:

$$q = \frac{s_n}{s_{n-1}}$$

Summe der ersten n+1-Glieder (2.4.11)

Es sei $\{s_n\}$ eine geometrische Folge mit dem Quotienten q.

$$\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} s_0 \quad \text{für } q \neq 1$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu = (n+1)s_0 \quad \text{für } \; q = 1$$

5 Logarithmen (2.6.2)

Es sei $b > 1$ und $c > 0$. Die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $b^x = c$ heißt Logarithmus von c zur Basis b:

$$x = \log_b c$$

6 Wurzeln

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m-n}}$$

Konvergenz einer geom. Folge (2.4.10)

Eine geometrische Folge $\{s_n\{$ mit dem Quotienten q konvergiert genau dann,
wenn $-1 < q \leq 1$ ist. Im Falle $|q| \leq 1$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = 0$$

Potenzregeln (2.5.9)

$a_1, a_2, a \in \mathbb{R}^+ \quad ; r_1, r_2, r \in \mathbb{R}$
Es gilt :

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$$

$$a_1^r \cdot a_2^r = (a_1 \cdot a_2)^r$$

$$(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}$$

$$a^0 = 1 \qquad \frac{a^{r_1}}{a^{r_2}} = a^{r_1 - r_2}$$

Logarithmenregeln (2.6.7)

$$\ln 1 = 0 \quad , \quad \ln e = 1$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln a^b = b \cdot \ln a$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln \sqrt[n]{a} = \ln a \cdot \frac{1}{n}$$

$$\ln \frac{1}{a} = -\ln a$$

7 Funktionen (3.1.3)

Eine Funktion f ist eine Vorschrift, durch welche jedem x einer gewissen Teilmenge $D(f) \subset \mathbb{R}$ in eindeutiger Weise eine reelle Zahl $f(x)$ zugeordnet wird.
Die Menge $D(f)$ heißt Definitionsbereich von f.
Die Menge $W(f) = \{y : y = f(x) \text{ mit } x \in D(f)\}$ heißt Wertebereich von f.

Stetigkeit von Funktionen (3.2.9)

Die Fkt. f heißt stetig an $x_0 \in D(f)$, wenn für jede Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \in D(f)$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert betrachten !!

Ein Polynom ist stetig auf $(-\infty, \infty)$.
Eine rationale Fkt. $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ist stetig auf $D(R)$. **(3.2.22)**

Die Fkt. $f(x) = a^x$, $D(f) = (-\infty, \infty)$ ist stetig auf $(-\infty, \infty)$ für $a > 0$ **(3.2.23)**

Die Fkt. $f(x) = \log_b x$, $D(f) = (0, \infty)$ ist stetig auf $(0, \infty)$ für $b > 1$. **(3.2.24)**

Die Fkt. $f(x) = x^r$, $D(f) = (0, \infty)$; $r \in \mathbb{R}$ ist stetig auf $(0, \infty)$. **(3.2.25)**

Grenzwerte von Funktionen (3.2.1)

Die Funktion f hat an der Stelle x_0 den Grenzwert g, wenn für jede Folge $\{x_n\}$ mit

$$x_n \in D(f),\ x_n \neq x_0,\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

$$\text{bzw.} \qquad \lim_{n\to\infty} f(x) = g$$

Stetigkeitsregeln (3.2.19)

Die Fkt. f und g seien stetig an x_0, dann gilt
$f + g$ ist stetig an x_0
$f \cdot g$ ist stetig an x_0
$\frac{f}{g}$ ist stetig an x_0 für $g \neq 0$

Beschränktheit von Funktionen (3.3.1)

Die Fkt. f ist stetig auf $[a, b]$. Dann ist f beschränkt, d.h. es gibt eine Konstante M, so daß

$$|f(x)| \leq M \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Surjektiv, Injektiv, Bijektiv

Eine Abbildung $f : x \mapsto y$ heißt

a) surjektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ ein Urbild gibt.

b) injektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ höchstens ein Urbild gibt.

c) bijektiv, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Extremstellen von Funktionen (3.3.3)

Die Funktion f hat

- an einer Stelle $\xi \in D(f)$ ein absolutes Minimum, wenn $f(\xi) \leq f(x) \quad \forall\, x \ \in D(f)$
- an einer Stelle $\eta \in D(f)$ ein absolutes Maximum, wenn $f(\eta) \geq f(x) \quad \forall\, x \ \in D(f)$

Zwischenwertsatz (3.3.6)

f sei stetig auf $[a,b]$. Es sei z eine Zahl mit

$$\min_{[a,b]} f(x) \leq z \leq \max_{[a,b]} f(x).$$

Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$f(\xi) = z$$

Umkehrfunktionen (3.4.3)

Ist $y = f(x)$ stetig und streng monoton auf $[a,b]$, dann existiert die Umkehrfunktion

$$x = f^*(x)$$

Stetigkeit und Differenzierbarkeit (4.1.8)

Ist f differenzierbar auf $x \subset D(f)$ so ist sie auf x stetig.

Produktregel, Quotientenregel (4.2.1)

Produktregel:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Absolute Maxima/Minima (3.3.4)

Die Funktion f sei stetig auf $[a,b]$, dann hat f

- an wenigstens einer Stelle ein absolutes Minimum
- an wenigstens einer Stelle ein absolutes Maximum

Monotonie von Funktionen (3.4.1)

$$\begin{aligned}
f(x_1) &\leq f(x_2) \Rightarrow f \text{ monoton wachsend}\\
f(x_1) &< f(x_2) \Rightarrow f \text{ streng monoton wachsend}\\
f(x_1) &\geq f(x_2) \Rightarrow f \text{ monoton fallend}\\
f(x_1) &> f(x_2) \Rightarrow f \text{ streng monoton fallend}
\end{aligned}$$

für $x_1 < x_2$!

Differentialquotient (4.1.1)

Die Funktion f heißt differenzierbar an $x_0 \in D(f)$

- wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.
- wenn sie an jeder Stelle x_0 differenzierbar ist.

Die Funktion f' mit $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$ heißt Ableitung von f.

Weitere Ableitungsregeln (4.2.2) (4.3.3)

$$f(x) = x^r \quad f'(x) = r \cdot x^{r-1} \quad r \in \mathbb{R}$$

Kettenregel:

$$f(x) = g(h(x) \qquad f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Kehrwertregel:

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} \qquad f'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

Lokale Extrema (4.4.2)

Die Funktion f sei definiert in (a,b) und differenzierbar in $\xi \in (a,b)$. Hat f an ξ eine Extremstelle, so gilt $f(\xi) = 0$

Mittelwertsatz der Differentialrechnung (4.4.9)

Die Fkt. f sei stetig in $[a,b]$ und db. in (a,b). Dann gibt es mindestens ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Kriterien für Extrema (4.5.2)

Die Fkt. f sei in (a,b) zweimal db. An der Stelle $\xi \in (a,b)$ gelte $f(\xi) = 0$.
Ist $f'(\xi) < 0$, so hat f an ξ ein **lokales Minimum**.
Ist $f'(\xi) > 0$, so hat f an ξ ein **lokales Maximum**.

Ableiten von $\ln x, e^x, x^\alpha$ (4.3)

$$f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x} \text{ (4.3.3)}$$

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x \text{ (4.3.4)}$$

$$y = f(x)^{g(x)} \;\Rightarrow\quad f'(x) = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln f(x))$$

(4.3.8)

Der Satz von Rolle (4.4.5)

Die Fkt. f sei stetig in $[a,b]$, und es gelte $f(a) = f(b) = 0$.
Dann gibt es mindestens ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = 0$.

Konstante Funktion (4.4.12)

Eine in $[a,b]$ db. Fkt. ist genau dann konstant, wenn gilt

$$f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$$

Monotonie (4.4.14)

Ist die Funktion f differenzierbar in $[a,b]$ und es gilt für alle $x \in (a,b)$
$f'(x) > 0$, so ist die Fkt. streng monoton wachsend.
$f'(x) < 0$, so ist die Fkt. streng monoton fallend.

8 Trigonometrische Funktionen

Trigonometrischer Pythagoras (5.3.3)

Es gilt

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \forall x$$

Additionstheoreme (5.3.5)

$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$
$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$
$\sin(x+\pi) = -\sin x$
$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$
$\cos(x+\pi) = -\cos x$

Hyperbolische Funktionen (5.5.1)

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad x \in (-\infty, \infty)$

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad x \in (-\infty, \infty)$

$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$

Additionstheoreme (5.5.3)

$\cosh(x+y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y$

$\sinh(x+y) = \sinh x \cdot \cosh y + \sinh y \cdot \cosh x$

Hyperbolischer Pythagoras (5.5.5)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Gerade-/Ungerade-Fkt.(sin,cos) (5.3.4)

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad \text{ungerade}$$

$$\cos(-x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad \text{gerade}$$

Tangens, Cotangens (5.3.6)

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\tan(x+\pi) = \tan x$ **(5.3.8)**

$\cot(x+\pi) = \cot x$

Ableitungen (5.3.10)

$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\cot x)' = \frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **(5.4.1)**

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\text{arccot } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\cosh x)' = \sinh x$ **(5.5.4)**

$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$ **(5.5.6)**

$(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ **(4.3.3)**

9 Grenzwerte

Die Regel von L'Hospital (4.6.1)

Wenn $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ für $x = a(0, \infty)$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt, so gilt:

$$\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)} \quad \text{für } \frac{u(a)}{v(a)} = \frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}$$

Polynome (5.1.6)

Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n reelle Nullstellen.

a, b, c-Formel:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

p/q-Formel:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Einige Grenzwerte

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad a > 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + a^n} = \begin{cases} 1 & \text{für } |a| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } |a| = 1 \\ 0 & \text{für } |a| > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

10 Integralrechnung (6.1.1)

Ist f in $[a,b]$ monoton und beschränkt, so ist f in $[a,b]$ integrierbar. Ist f in $[a,b]$ stetig, so ist f in $[a,b]$ integrierbar. **(6.1.7)**

Elementare Eigenschaften (6.2.1)

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = \int f(x) + g(x)dx$$

$$\int a \cdot f(x)dx = a \int f(x)dx$$

Abschätzung von Integralen (6.2.5)

Es gilt: $m \leq f(x) \leq M$

$$\Rightarrow m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b-a)$$

f und g seien stetig in $[a,b]$ und $f(x) \leq g(x)$, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (6.3.4)

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Rieman'sche Summe (6.1.1)

$$S_z = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Integrierbarkeit (6.2.4)

Eine Funktion $f, D(f) = [a,b]$ ist integrierbar, wenn für jedes $c \in D(f)$ die Funktion f in $[a,c]$ und in $[c,b]$ integrierbar ist:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung (6.2.6)

f sei stetig in $[a,b]$, dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b-a)$$

Berechnung bestimmter Integrale (6.3.2)

Eine Funktion $F(x)$ heißt Stammfunktion zu f, wenn gilt :

$$F'(x) = f(x)$$

$$F_1(x) = F_2(x) + c \quad \textbf{(6.3.3)}$$

Numerische Integration (Zusatz-Skript)

Trapezregel

$$\int_a^b f(x)dx = h \cdot (\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)) + R$$

$$R = -\frac{1}{12}h^2(b-a)f''(\xi) \quad \text{für } h = \frac{b-a}{n} \qquad \xi \in [a,b]$$

(Restglied)

Simpson'sche Regel

Für f existiere die 4. Ableitung und f sei stetig.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)) + R$$

$$R = -\frac{1}{180}h^4(b-a)f''(\xi) \quad \text{für geeignetes } \xi \in [a,b]$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Integrationsregeln

Integrale des Typs $\frac{\textbf{Ableitung}}{\textbf{Funktion}}$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c \; \mathbf{(6.3.8)}$$

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\frac{f(b)}{f(a)} + c$$

Integrale des Typs Funktion · Ableitung

$$\int f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{(f(x))^2}{2} + c$$

Polynome

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Exponentialfunktionen

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

Nat. Logarithmus, $\frac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \ln x \; dx = x \cdot \ln|x| - x + c$$

Trigonometrie

$$\int \sin x \; dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \; dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \; dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \; dx = -\cot x + c$$

Zyklometrie

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} \arctan x + c \\ -\text{arccot }x + c \end{cases}$$

Hyperbolische Funktionen

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + c$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + c$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx = -\coth x + c$$

Integrationsmethoden

Partielle Integration (6.4.8)

$$\int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx = f(x)\cdot g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx$$

Substitutionsregel (6.4.3)

1. Substituieren: $t = \cdots$
2. $\frac{dx}{dt} = \cdots$
3. Nach dx auflösen: $dx = \frac{1}{t'}dt$
4. Integrieren
5. Integrationsgrenzen durch einsetzen in t wandeln
6. Rücksubstituieren

Partialbruchzerlegung (6.4.3)

1. Fals kein echt gebrochener Bruch vorliegt $\rightarrow$ Polynomdivision
2. Nullstellen des Nennerpolynoms bestimmen
3. Nenner eliminieren durch Erweitern
4. Koeffizientenvergleich
5. Integrieren

Uneigentliche Integrale (6.5.1)

Die Fkt. f sei eigentlich integrierbar in $[a, \beta]$ mit $a < \beta < b$. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{B \to b} \int_a^B f(x)dx$$

so heißt f uneigentlich Integrierbar, und man bezeichnet

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{B \to b} \int_a^B f(x)dx$$

als uneigentliches Integral.

Konvergenz für uneigentliche Integrale (Zusatz-Skript)

Majorantenkriterium

f, g auf $[a, \infty]$ stetig.
Gilt: $|f(x)| \leq g(x)$, dann existiert $\int_a^\infty f(x)dx$, wenn $\int_a^\infty g(x)dx$ existiert.

11 Reihen

Es sei $\{a_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen. Die ihr zugeordnete Folge $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ heißt die mit $\{a_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ gebildete Reihe.

Wir schreiben $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$.

Reihensumme (7.1.7)

Es seien $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ konvergente Reihen; α, β =konst.
Dann konvergiert auch $\sum_{\nu=0}^{\infty}(\alpha\ a_\nu + \beta\ b_\nu)$ und es gilt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(\alpha\ a_\nu + \beta\ b_\nu) = \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu + \beta \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$$

Majorantenkriterium (7.2.1)

Es sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ eine konvergente Reihe mit $b_\nu \geq 0$ und $\nu \geq 0$.
Gilt $|a_\nu| \leq b_\nu \forall\ \nu$ so konvergiert auch $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$.

Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ heißt konvergent zur Summe s, wenn $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ gilt.
Wir schreiben

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = s$$

Konvergenz

Nullfolge (7.8.1)

Konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$, so gilt

$$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$$

Harmonische Reihe (7.1.11)

Die harmonische Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\alpha}$ konvergiert für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha \leq 1$.

Absolute Konvergenz (7.2.2)

Eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ ist absolut konvergent, wenn

$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|$ konvergiert.

Konvergenzkriterien für Reihen

Quotientenkriterium (7.2.6)

Gegeben sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ mit $a \neq 0 \quad \forall \quad \nu \geq 0$.

Die Reihe konvergiert sicher dann, wenn ein $\nu \geq 0$ und ein $q, 0 < q < 1$ existieren, so daß gilt

$$\boxed{\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| \leq q < 1} \quad \forall \quad \nu \geq \nu_0$$

Die Reihe divergiert, wenn $\nu_0 \geq 0$ existiert, so daß gilt

$$\boxed{\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| \geq 1} \quad \forall \quad \nu \geq \nu_0$$

Leibnitz-Kriterium (7.2.17)

Eine alternierende Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu \quad \text{mit } a_\nu \geq 0$$

konvergiert, wenn $\{a_\nu\}$ eine monotone Nullfolge ist.

Wurzelkriterium (7.2.11)

Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergiert, wenn

$$\boxed{\lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} < 1} \quad \text{gilt.}$$

Sie divergiert, wenn

$$\boxed{\lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} > 1} \quad \text{gilt.}$$

12 Potenzreihen (7.3)

Die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot x^\nu$$

mit $\{a_\nu\}$ und $x \in \mathbb{R}$ heißt eine Potenzreihe.

Konvergenzradius (7.3.7)

Gegeben sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot x^\nu$.

Existiert $\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\sqrt[\nu]{|a_\nu|}}$,

So ist

$$\boxed{R = \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\sqrt[\nu]{|a_\nu|}}.}$$

Existiert

$$\lim_{\nu\to\infty} \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|,$$

so ist

$$\boxed{R = \lim_{\nu\to\infty} \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|}$$

der Konvergenzradius der Potenzreihe.

Konvergenz von Potenzreihen (7.3.4)

<u>Konvergiert</u> $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot x_1^\nu$ für$x_1 \neq 0$,
so konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu \cdot x^\nu| \quad \forall \quad x||x| < |x_1|$

<u>Divergiert</u> $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot x_2^\nu$ für einx_2,
so divergiert auch $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot x_2^\nu$
$\forall \quad x||x| > |x_2|$.

Funktionen und Potenzreihen (7.3.10)

Sei

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot x^\nu$$

dann ist

$$f'(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu \cdot a_\nu \cdot x^{\nu-1}.$$

Identitätssatz für Potenzreihen (7.3.12)

Es seien $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot x^\nu$ und $g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \cdot x^\nu$ gegeben.

$f(x) = g(x)$ genau dann, wenn $a_\nu = b_\nu \quad \forall \quad \nu \geq 0$.

13 Funktionsreihen

Mac Laurin'sche Reihe (7.4.5)

$$f(x) = \left[\sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^{\nu}\right] + R_n(x)$$

mit $R_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int_0^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t) \cdot dt$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x^1 + \frac{f''(0)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots + R_n(x)$$

Wichtige Funktionsreihen (7.4.16)

Taylor'sche Reihe

$$f(x+h) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!} h^{\nu}$$

$$= f(x) + \frac{f'(x)}{1} h^1 + \frac{f''(x)}{1 \cdot 2} h^2 + \cdots$$

14 Fourier-Reihen (7.5.4)

Die Funktion f sei 2π-Periodisch in $[-\pi, \pi]$.
Die Zahlen

$$a_\nu = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(\nu x) dx \quad (\nu = 0, 1, \dots)$$

$$b_\nu = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(\nu x) dx \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

heißen Fourier-Koeffizienten von f.
Die Reihe

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos(\nu x) + b_\nu \sin(\nu x))}$$

heißt Fourier-Reihe von f.

Gerade Funktion (7.5.8)

Ist f gerade so gilt:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos(\nu x)$$

und

$$a_\nu = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(\nu x) dx \quad (\nu = 0, 1, \dots)$$

Bei geraden Fkt. kann man das Integral auch von $[-\pi, \pi]$ gehen lassen und mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren !

Ungerade Funktion (7.5.9)

Ist f ungerade so gilt:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (b_\nu \sin(\nu x)$$

und

$$a_\nu = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(\nu x) dx \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

Konvergenz von Fourier-Reihen (7.5.6)

Ist f stetig an x, so gilt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos(\nu x) + b_\nu \sin(\nu x))$$

Ist f unstetig an x, so gilt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos(\nu x) + b_\nu \sin(\nu x))$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}$$

Funktionen mit beliebigen Perioden (7.5.4)

Die Funktion f hat die Periode $2L$, dann ist

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos(\frac{\nu\pi}{L} \cdot x) + b_\nu \sin(\frac{\nu\pi}{L} \cdot x))$$

$$a_\nu = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \cos(\frac{\nu\pi}{L} \cdot x) dx$$

$$b_\nu = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \sin(\frac{\nu\pi}{L} \cdot x) dx$$

die Fourier-Reihe von f.

15 Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Grundbegriffe

$$z = x + iy = (x, y) \quad \text{(Normalenform)}$$

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \quad \text{(Polarform)}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{(Betrag)}$$

$$\varphi = \arctan\frac{x}{y} \quad \text{(Argument)}$$

$$x = r \cdot \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \sin\varphi$$

$$i = \sqrt{-1} \qquad i^2 = -1$$

Lösung der Gleichung $z^n = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$$\begin{aligned} z^n &= \sqrt[n]{r}(\cos(\underbrace{\frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{360°}{n}}_{\varphi_n}) + \\ &+ \; i \cdot \sin(\underbrace{\frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{360°}{n}}_{\varphi_n})) \end{aligned}$$

$$\text{mit } k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i(\sin(n\varphi)))$$

$$\varphi_k = \frac{\alpha + (360° \cdot k)}{n}$$

Konvergiert komplexe Zahlen

$$\overline{z} = x - iy$$

x heißt Realteil von z $\quad Re(z)$
y heißt Imaginärteil von z $\quad Im(z)$

Rechenregeln für komplexe Zahlen

Summe : $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$

Differenz : $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$

Produkt :

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= x_1 \cdot x_2 + y_1 y_2 i^2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i \end{aligned}$$

Polarform :

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Quotient :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{\underbrace{z_2 \cdot \overline{z_2}}_{|z_2|^2 = x_2^2 + y_2^2}}$$

(Erweitern mit konjugiert kompl. Nenner!!)

Euler'sche Formel

Es gilt

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

16 Funktionentheorie

Komplexe Funktionen (1.3.1)

- Eine Funktion f einer komplexen Variablen ist eine Vorschrift, durch welche jedem z einer gewissen Teilmenge $D(f) \subset \mathbb{C}$ in eindeutiger Weise eine komplexe Zahl $f(z)$ zugeordnet wird.
- Die Menge $D(f)$ heißt Definitionsbereich von f.
- Die Menge $W(f) = \{w : w = f(z)$ mit $z \in D(f)\}$ heißt Wertebereich von f.

Stetigkeit (1.3.3)

- Die Funktion f heißt stetig an der Stelle $x_0 \in D(f)$, wenn für jede Folge $\{z_n\}$ mit
$$z_n \in D(f), \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$
für die Folge $\{f(z_n)\}$ der zugehörigen Funktionswerte gilt
$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0).$$
- Die Funktion f heißt stetig auf der Menge M, wenn $M \subset D(f)$ gilt und f an jedem $z_0 \in M$ stetig ist.

Die Funktion $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ist stetig an $z_0 = x_0 + iy_0$ genau dann, wenn die Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ beide an (x_0, y_0) stetig sind. (1.3.7)

Stetigkeit von verknüpften Funktionen (1.3.8)

Sind f und g stetig an $z_0 \in D(f) \cap D(g)$ so sind

$$f+g, \qquad f \cdot g, \qquad \frac{f}{g} \quad \text{fals} \quad g(z_0) \neq 0$$

ebenfals stetig an z_0.

Es sei $W(g) \subset D(f)$. Ist dann g stetig an z_0 und f stetig an $g(z_0)$, so ist $f \circ g$ ebenfals stetig an z_0.

Grenzwerte von Funktionen (1.3.9)

Dei Fkt f hat an der Stellez_0 den Grenzwert $g \in \mathbb{C}$, wenn jede Folge $\{z_n\}$ mit

$$z_n \in D(f), \quad z_n \neq z_0, \quad \lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$

für die Folge $\{f(z_n)\}$ der zugehörigen Funktionswerte gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = g.$$

Wir schreiben auch $\lim_{z\to z_0} f(z) = g$.

Ableitung im Komplexen (1.4.1)

Die Funktion f heißt diffbar. an $z_0 \in D(f)$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Wir bezeichnen ihn mit $\frac{df}{dz}(z_0)$ und nennen ihn Ableitung von f an z_0.

Die Fkt. $f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0)$ heißt Ableitung von f.

Stetigkeit und diffbarkeit (1.4.6)

Ist f auf $M \subset \mathbb{C}$ differenzierbar, so ist sie auch stetig.

Ableitungsregeln (1.4.7)

Summenregel

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$$

Produktregel

$$(f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z) \cdot g'(z)$$

Quotientenregel

$$(\frac{f}{g})(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$$

Kettenregel (1.4.9)

Es gilt : $h = g \circ f$

$$h'(z) = (g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z) \quad .$$

Die CAUCHY-RIEMANNSCHEN-DGL's (1.4.10)

Die Fkt. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sei diffbar an z_0. Dann existieren in (x_0, y_0) die part. Ableitungen u_x, u_y, v_x und v_y und es gilt:

$$u_x = v_y; \qquad u_y = -v_x$$

Diese partiellen DGL's heißen CAUCHY-RIEMANN-sche DGL's.

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y \quad .$$

Regularität (1.4.12)

f heißt regulär (oder analytisch oder holomorph) an z_0, wenn eine offene Menge O so exeistiert, daß $z_0 \in O \subset D(f)$ gilt und f an jedem Punkt von O diffbar. ist.

f heißt regulär, auf einer Menge M, wenn $M \subset D(f)$ gilt und f an jedem Punkt von M regulär ist.

Nachweis der Regularität (1.4.15)

Erfüllen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ die CAUCHY-RIEMANNSCHEN-DGL's

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

so ist $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ regulär an $z_0 \in O$.

Eigenschaften regulärer Fkt. (1.4.17)

Die Fkt. f sei regulär im gebiet G. Dann existieren in G alle Ableitungen $f^{(n)}$ $(n = 1, 2, \dots)$ und sind dort ebenfalls reguläre Fkt.

Harmonische Funktionen (1.4.18)

Eine Fkt. $\varphi(x,y)$ heißt in einem Gebiet G harmonisch, wenn sie in G stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung hat und dise in G der LAPLACEschen DGL

$$\Delta\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$$

genügen.

Ist $f(z) = u(x,y) + i(x,y)$ regulär auf g, so sind $u(x,y)$ und $v(x,y)$ harmonisch in G. (1.4.19)

Konstante Funktion (1.4.21)

f sei regulär im Gebiet G. Dann ist f in G genau dann konstant, wenn gilt

$$f'(z) = 0 \qquad \forall \quad z \in G.$$

17 Komplexe Polynome (1.5.1)

- Eine Fkt. P, die durch

  $$P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \quad (a_\nu \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0), \quad D(P) = \mathbb{C}$$

  erklärt ist, heißt ein Polynom. Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der Grad von P.

- Es seien P, Q Polynome. Die Fkt. R, die durch

  $$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad D(R) = \{z : Q(z) \neq 0\}$$

  erklärt ist, heißt eine rationale Fkt.

Diffbarkeit von rationalen Fkt. (1.5.2)

Rationale Funktionen sind auf $D(R)$ differenzierbar.

Nullstellen (1.5.3)

Eine Fkt. φ hat an der Stelle z_0 eine Nullstelle der Ordnung $\rho = 1$, wenn gilt

$$\varphi(z_0) = \varphi'(z_0) = \cdots = \varphi^{(\rho-1)}(z_0) = 0, \quad \varphi^{(\rho)}(z_0) \neq 0.$$

Komplexe a, b, c-Formel (1.5.4)

Es sei $P(z) = a + bz + cz^2$ mit $a, b, c \in$R$, c \neq 0$, und es gelte $b^2 - 4ac < 0$. Dann gilt :

$$z_{1/2} = -\frac{b}{2c} \pm \frac{i}{2c} \cdot \sqrt{4ac - b^2}.$$

Fundamentalsatz der Algebra (1.5.6)

Ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ hat genau n komplexe Nullstellen.

Konjugierte Nullstellen (1.5.8)

Ist z_0 eine Nullstelle der Ordnung ρ von P, so ist auch $\overline{z_0}$ eine Nullstelle der Ordnung ρ von P.

18 Komplexe Exponentialfunktionen (1.5.9)

Es gilt

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Periodizität (1.5.10)

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^{z+2\pi i} = e^z$$

Rechenregeln (1.5.11),(1.5.12)

- Es gilt

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \quad \text{für} z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

- Weiterhin gilt

$$e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Regularität von e^z (1.5.13)

Die Fkt. e^z ist regulär auf $\mathbb{C}$ und es gilt

$$(e^z)' = e^z$$

19 Komplexe trigon. Fkt. (1.5.14)

Es gilt

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{it} + e^{-iz}}{2}.$$

Ableitungen (1.5.15)

Die Fkt. $\sin z$ und $\cos z$ sind regulär auf $\mathbb{C}$, und es gilt

$$(\sin z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\sin z.$$

Additionstheoreme (1.5.16)

Es gilt

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$

Periodizität (1.5.17)

Die Fkt. $\sin z$ und $\cos z$ sind periodisch mit der Periode 2π.

Trigonometrischer Pythagoras (1.5.18)

Es gilt

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

Zusammenhang zwischen hyperbol. und trigon. Fkt. (1.5.19)

Es gilt

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

Nullstellen von Sinus und Cosinus (1.5.21)

Es gilt

$\sin z = 0$ genau dann, wenn $z = k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\cos z = 0$ genau dann, wenn $z = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Tangens, Cotangens (1.5.22)

Es gilt

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

20 Komplexe hyperbolische Funktionen (1.5.23)

Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Die Fkt. $\sinh z$ und $\cosh z$ sind stetig auf $\mathbb{C}$.

Ableitungen (1.5.24)

Die Fkt. sind regulär auf $\mathbb{C}$ und es gilt

$$(\sinh z)' = \cosh z, \qquad (\cosh z)' = \sinh z.$$

Weitere Eigenschaften

$$\sinh z = -i \sin(iz) \qquad \cosh z = \cos(iz) \quad (1.5.25)$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

Die Funktionen $\cosh z$ und $\sinh z$ sind periodisch mit der Periode $2\pi i$.

Die Nullstellen ligen bei $z = k\pi i$ bzw.
$z = (k\pi + \frac{\pi}{2})i$.

Tangenshyperbolicus (1.5.26)

Es gilt

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

$$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

21 Das komplexe Integral

Sei $f(z)$ stetig in deinem Gebiet G und durch $z(t) = x(t) + iy(t)$ für $t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ sei eine rektifizierbare Kurve K in G gegeben. So heißt

$$S = \int_K f(z)dz$$

das komplexe (Kurven-)Integral von $f(z)$ über K.

Beim Kurvenintegral gilt

$$\int_K f(z)dz = -\int_{-K} f(z)dz$$

Eigenschaften (4.2) (4.3)

$$\int_{K_\rho(0)} z^n dz = \begin{cases} 0 & \text{für } n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\} \\ 2\pi i & \text{für } n = -1 \end{cases}$$

$$\int_K f(z)dz + \int_K g(z)dz = \int_K f(z) + g(z)dz$$

$$\int_K a \cdot f(z)dz = a\int_K f(z)dz$$

$$\left|\int_K f(z)dz\right| \leq \{\max_K |f(z)|\} \cdot L(K)$$

fals f stetig auf K und $L(K)$ die Bogenlänge von K ist.

Berechnung des Integrals (4.1)

Sei $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ stetig in einem Gebiet G und durch $z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ eine stückweise glatte Kurve K in G gegeben, dann gilt

(i) Das Integral

$$\int_K f(z)dz$$

existiert.

(ii)

$$\boxed{\int_K f(z)dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)dz}$$

wobei $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ ist.

Hauptsatz der D. und I. im komplexen (4.4)

Es gilt

$$\int_K f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$$

wobei z_0, z_1 Anfangs- und Endpunkt von K sind.

Ist K geschlossen so gilt

$$\int_K f(z)dz = \oint_K f(z)dz = 0$$

Hauptsatz der Funktionentheorie (5.1)

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f sei diffbar. auf G.
Ist K eine ganz in G liegende geschlossene rektifizierbare Kurve, so ist

$$\int_K f(z)dz = 0.$$

Cauchy'sche Integralformel (6.1)

Die Funktion f und das Gebiet G haben die Eigenschaften von Satz 5.2. $a \in \mathbb{C}$ und liege in K.

$$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{z-a} \quad dz}$$

Liegt a außerhalb von K, so gibt die rechte Seite der Formel den Wert 0.

Satz von Liouville (6.3)

Ist f auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar, so ist f konstant.

Ringintegrale (5.2)

K_1 und K_2 seien zwei geschlossene, doppelpunktfreie rektifizierbare Kurven, die ganz in einem (nicht notwendig zusammenhängenden) Gebiet G verlaufen, und K_2 liege ganz im inneren von K_1. Beide Kurven werden mathematisch positiv durchlaufen.
Ist f diffbar. auf G, so gilt

$$\int_{K_1} f(z)dz = \int_{K_2} f(z)dz.$$

Ableitungen (6.2)

Unter den Voraussetzungen von Satz 6.1 gilt für jedes a aus dem inneren von K

1. Die n-te Ableitung $f^{(n)}(a)$ existiert für alle $n \in \mathbb{N}$
2. $$\boxed{f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \quad dz}$$

22 Potenz- und Taylor-Reihen (7.0)

Die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot (z - z_0)^\nu$$

mit $\{a_\nu\}$ und $z, z_0 \in \mathbb{C}$ heißt eine komplexe Potenzreihe um z_0.

Konvergenzradius (7.2 5.)

Gegeben sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot z^\nu$.

Existiert $\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\sqrt[\nu]{|a_\nu|}}$,

So ist

$$\boxed{R = \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\sqrt[\nu]{|a_\nu|}}.}$$

Existiert

$$\lim_{\nu\to\infty} \left| \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \right|,$$

so ist

$$\boxed{R = \lim_{\nu\to\infty} \left| \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \right|}$$

der Konvergenzradius der Potenzreihe.

Konvergenz (7.2)

Für jede Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot z^\nu$ gilt genau eine der drei folgenden Aussagen:

(i) die Reihe konvergiert für $z = 0$, d.h. sie divergiert.

(ii) die Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$

(iii) es gibt eine Zahl $R > 0$ so daß die Reihe für $|z| < R$ konvergiert, und sonst divergiert.

Funktionen und Potenzreihen (7.3)

Sei

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cdot z^\nu$$

dann ist

$$f'(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu \cdot a_\nu \cdot z^{\nu-1}.$$

Taylor-Reihe (7.5)

Sei $f(z)$ diffbar. für $|z - z_0| < R$ mit $z_0 \in \mathbb{C}$ und $R > 0$
Dann ist $f(z)$ eindeutig darstellbar durch eine Potenzreihe um z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die in $G := \{z : |z - z_0| < R\}$ konvergiert.

Die Koeffizienten lauten

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}$$

oder

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \quad dz}$$

Konvergenz im Gebiet

Ist $f(z)$ auf einem Gebiet G diffbar. und $z_0 \in G$, so konvergiert die Taylor-Reihe in dem größten Kreis um z_0, der noch in G liegt.

23 Laurent-Reihen (8.1)

Konvergenz (8.1)

Mit $a_n, z_0 \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{Z}$ heißt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

eine Laurent-Reihe um z_0.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

heißt Regulärteil und

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

heißt Hauptteil der Laurent-Reihe.